

УДК 517.929

О РАЗДЕЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ

© М.В. Мулюков

Ключевые слова: триангуляризация матриц; устойчивость; функционально-дифференциальные уравнения.

Получен новый критерий одновременной триангуляризации пучка 2×2 -матриц. Он использован для изучения некоторых систем двух уравнений.

Многие модели, используемые эмпирическими науками, приводят к линейным системам дифференциальных, разностных, интегральных, дифференциально-разностных или функционально-дифференциальных уравнений. Поиск преобразования, позволяющего разделить уравнения системы, представляет интерес уже для систем двух уравнений. В данной работе найден эффективный признак разделимости уравнений в таких системах и указано искомое преобразование.

Рассмотрим дополненную необходимыми начальными или граничными условиями систему $U_0x + \sum_{k=1}^n A_k U_k x = 0$, где A_k — пучок комплексных 2×2 -матриц. $x = (x_1, x_2)^T$. Операторы $U_k: X \rightarrow Y$ линейны, где X, Y — линейные пространства. $x_1, x_2 \in X$. $U_k x = (U_k x_1, U_k x_2)^T$. Символом $\lambda_{1,2}^{(k)}$ обозначим собственные числа матрицы A_k . Нижний индекс собственных чисел соответствует порядку, в котором они стоят на диагоналях соответствующих матриц. I — единичная матрица. $J(\lambda)$ — жорданова клетка, соответствующая собственному числу λ кратности 2. Введем обозначение для матричной операции $[A, B] = \det(AB - BA)$. Уравнения системы разделяются, если существует базис, в котором все матрицы принимают верхнюю треугольную форму.

Т е о р е м а 1. *Следующие утверждения эквивалентны*

- (1) *Существует невырожденное преобразование базиса, приводящее все матрицы A_k ($k = \overline{1, N}$) к верхнему треугольному виду;*
- (2) *Для любых комплексных чисел z_k имеет место тождество $\det \left(I z_0 + \sum_{k=1}^N A_k z_k \right) = (z_0 + \sum_{k=1}^N \lambda_1^{(k)} z_k)(z_0 + \sum_{k=1}^N \lambda_2^{(k)} z_k)$;*
- (3) *$\forall i, j \in \overline{1, N}: [A_i, A_j] = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3) доказывается непосредственно, для чего удобно воспользоваться равносильностью выражений $[A_i, A_j] = 0$ и $\det(A_i + A_j) = (\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)})(\lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)})$.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из того, что значение $[A, B]$, как легко видеть, не зависит от выбора базиса.

Докажем импликацию (3) $\Rightarrow$ (1). Без ограничения общности будем считать, что найдется матрица $A_k \neq \lambda^{(k)} I$. Приведем все N матриц к тому базису, в котором A_k имеет жорданову форму. Если $A_k = J(\lambda^{(k)})$, то из (3) следует, что все матрицы принимают в этом базисе верхнюю треугольную форму [1]. В той же работе доказана данная теорема для двух матриц. Следовательно, если A_k принимает диагональную форму, то все остальные матрицы принимают треугольную форму. Предположим, что нашлась матрица A_i , принимающая верхнюю треугольную форму, и матрица A_j , принимающая нижнюю. Обозначим через r_i, r_j внедиагональные элементы этих матриц. Из $[A_i, A_j] = 0$ следует, что $\det(A_i + A_j) = (\lambda_1^{(i)} + \lambda_1^{(j)})(\lambda_2^{(i)} + \lambda_2^{(j)}) = (\lambda_1^{(i)} + \lambda_1^{(j)})(\lambda_2^{(i)} + \lambda_2^{(j)}) - r_i r_j$. $\square$

Отношение $[A, B] = 0$ нетранзитивно, поэтому, если никакой информации о спектре матриц нет, то требуется выполнить $N(N-1)/2$ операций сравнения, и это число не уменьшаемо. Однако если известно, что $A_k = J(\lambda^{(k)})$, то достаточно $N-1$ операция сравнения.

Полученный результат важен для изучения устойчивости линейных автономных систем, поскольку изменение базиса не влияет на устойчивость этих систем. В следующих примерах будем полагать, что все начальные условия заданы, а решения систем существует и единственно в соответствующих пространствах.

Пример 1. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x_n + A_1 x_{n-m} + A_2 x_{n-k} = 0, \quad n, m, k \in \mathbf{Z}_+, \quad k > m > 1.$$

Если $[A_1, A_2] = 0$, то задача об отыскании критериев устойчивости эффективно разрешается в терминах собственных чисел матриц, для чего достаточно воспользоваться результатами, полученными для скалярного уравнения [2].

Пример 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений запаздывающего типа

$$\dot{x} + A_1 x(t) + \sum_{k=2}^{N_1} A_k x(t - \tau_k) + \sum_{k=N_1+1}^{N_2} A_k \int_{t-\tau_k-h_k}^{t-\tau_k} x(s) ds + \sum_{k=N_2+1}^{N_3} A_k \dot{x}(t - \tau_k) = 0, \quad t \geq 0.$$

Пусть $\forall i, j \in \overline{1, N_2}: [A_i, A_j] = 0$. Тогда характеристическая функция данной системы F допускает *факторизацию*, т. е. представление в виде произведения $F(z) = f_1(z)f_2(z)$

$$f_i(z) = \left(z + \lambda_i^{(1)} + \sum_{k=2}^{N_1} \lambda_i^{(k)} e^{-\tau_k z} + \sum_{k=N_1+1}^{N_2} \lambda_i^{(k)} \frac{e^{-\tau_k z} (1 - e^{-h_k z})}{z} + \sum_{k=N_2+1}^{N_3} \lambda_i^{(k)} z e^{-\tau_k z} \right), \quad i = \overline{1, 2}.$$

Для данной функции известны критерии устойчивости, если

- 1) $N_1 = N_2 = N_3 = 1$
- 2) $\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 0, N_1 = N_2 = 1, N_3 = 2$,
- 3) $N_1 = N_2 = N_3 = 2$ [3],
- 4) $N_1 = 1, N_2 = N_3 = 2$ [4], [5].

Заметим, что если факторизация возможна, то матрицы, эквивалентные $J(0)$, не влияют на устойчивость системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мулюков М.В. О факторизации характеристического квазиполинома системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия вузов. Математика. В печати.
2. Kipnis M.M., Malygina V. V. The stability cone for a matrix delay difference equation // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2010. V. 2011.
3. Khokhlova T., Kipnis M., Malygina V. The stability cone for a delay differential matrix equation // Applied Mathematics Letters. 2011. № 24. P. 742-745.
4. Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Известия вузов. Математика. Казань. 2007. № 6. С. 55-63.
5. Сабатулина Т.Л. Дифференциальные уравнения с распределенным запаздыванием. Асимптотические свойства решений. LAP LAMBERT Academic Publishing. С. 114.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 13-01-96050).

Mulyukov M.V. ON THE SEPARATION OF EQUATIONS OF SOME SYSTEMS

We obtain a criterion of simultaneous triangularization for a set of 2×2 -matrixes. We use it to investigate some systems of two equations.

Key words: matrix triangularization; stability; functional differential equations.